

TD n°6: Fonctions spéciales

Analyse complexe 2025-2026, Thomas Serafini
tserafini@dma.ens.fr

Les exercices marqués d'un  sont à faire en priorité, ceux marqués d'un  sont des exercices complémentaires, à faire pour aller plus loin.

Fonctions elliptiques

Dans toute cette partie, on fixe un réseau $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$.

Exercice 1. L'équation différentielle satisfaite par $\wp$.

On pose, pour $n > 2$, la quantité :

$$G_n(\Lambda) = \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\lambda^n}.$$

1. Démontrer que le développement au voisinage de 0 de $\wp$ est

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)G_{2n+2}(\Lambda)z^{2n}.$$

On sait déjà que

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda \neq 0} \frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2}$$

donc il faut juste démontrer que

$$f(z) = \sum_{\lambda \neq 0} \frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \sum_{n \geq 1} (2n+1)G_{2n+2}z^{2n}.$$

Pour ce faire, il suffit de calculer les dérivées successives de f . On a $f(0) = 0$, et pour $n \geq 1$:

$$f^{(n)}(z) = \sum_{\lambda \neq 0} \frac{(-1)^n (n+1)!}{(z-\lambda)^{n+2}}.$$

En évaluant en 0, on trouve $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = (-1)^n (n+1)G_{n+2}(\Lambda)$, qui est nul si n est impair et on obtient donc le résultat attendu.

2. En déduire que $\wp$ satisfait l'équation différentielle

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - 60G_4(\Lambda)\wp(z) - 140G_6(\Lambda).$$

Il suffit de calculer les 6 premiers termes du développement en série de Laurent en 0 de chaque côté. En effet, la fonction $\wp'^2 - 4\wp^3 - 60G_4\wp - 140G_6$ est Λ -périodique et n'a pas de pôles hors de Λ , donc si elle est holomorphe en 0 elle est nécessairement constante.

Au travail :

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + 6G_4z + 20G_6z^3 + O(z^5)$$

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + 3G_4z^2 + 5G_6z^4 + O(z^6).$$

On trouve donc

$$\wp'^2 = \frac{4}{z^6} - \frac{24G_4}{z^2} - 80G_6 + O(z^2)$$

$$\wp^3 = \frac{1}{z^6} + \frac{9G_4}{z^2} + 15G_6 + O(z^2).$$

[†]Merci à Hadrien et Louise pour ce phoque et ce raton-laveur en Tikz.

Il en découle que

$$\wp'^2 - 4\wp^3 = -\frac{60G_4}{z^2} - 140G_6 + O(z^2)$$

et puisque $\wp = \frac{1}{z^2} + O(z^2)$, on trouve que $60G_4\wp + 140G_6 = \frac{60G_4}{z^2} + 140G_6 + O(z^2)$ et par conséquent

$$\wp'^2 - 4\wp^3 + \frac{60G_4}{z^2} + 140G_6 = O(z^2)$$

et cette fonction est donc constante à 0.

Exercice 2. Uniformisation des courbes elliptiques.

1. En appliquant le principe de l'argument à un contour bien choisi, démontrer que pour $a \in \mathbb{C}$, la fonction $\wp - a$ a exactement deux zéros (avec multiplicités) modulo Λ et en déduire que $\wp(z) = \wp(w)$ si et seulement si $z = \pm w \pmod{\Lambda}$, et que $\wp$ est surjective.

Comme contour bien choisi, on prend un parallélogramme fondamental du réseau décalé de sorte à ce que ses côtés ne rencontrent aucun zéro ou pôle de $\wp - a$, et on trouve par le principe de l'argument que le nombre de zéros de $\wp - a$ dans un tel parallélogramme est égal au nombre de pôles avec multiplicité. Comme $\wp - a$ n'a qu'un pôle d'ordre 2 en chaque point de Λ (et donc un seul dans le parallélogramme choisi), d'où $\wp - a$ a exactement deux zéros avec multiplicité. La surjectivité en découle immédiatement. De plus, si $2w \notin \Lambda$, la parité de $\wp$ assure que $z \mapsto \wp(z) - \wp(w)$ a comme seuls zéros z et $-z$ modulo Λ . Si $2w \in \Lambda$, on a $\wp'(w) = 0$ car $w = -w \pmod{\Lambda}$ et $\wp'$ est impaire, donc $z \mapsto \wp(z) - \wp(w)$ s'annule à l'ordre 2 en w .

2. Soit f une fonction Λ -périodique avec un pôle d'ordre 3 en 0 et aucun autre pôle. Démontrer que f a trois zéros avec multiplicités modulo Λ . Dans le cas $f = \wp'$, expliciter ces zéros.

On applique le principe de l'argument de la même manière que dans la question précédente. Si ω_1, ω_2 sont une base du réseau, alors $\wp'$ s'annule en $\frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_2}{2}, \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$, qui sont distincts modulo Λ .

3. On définit $E_\Lambda \subseteq \mathbb{C}^2$ par

$$E_\Lambda = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : y^2 = 4x^3 - 60G_4(\Lambda)x - 140G_6(\Lambda)\}.$$

Démontrer que $z \mapsto (\wp(z), \wp'(z))$ définit une bijection de $\mathbb{C}/\Lambda \setminus \{0\}$ vers E_Λ .

Commençons par l'injectivité : supposons que $\wp(z) = \wp(w)$ et $\wp'(z) = \wp'(w)$. On a par la première question que $z = \pm w \pmod{\Lambda}$ et donc soit $z = w \pmod{\Lambda}$, soit on a $\wp'(z) = \wp'(w) = -\wp'(z) = 0$. L'annulation de $\wp'$ en z implique que $2z \in \Lambda$, ce qui implique que $z = -z \pmod{\Lambda}$ et donc $z = w \pmod{\Lambda}$. Voyons à présent la surjectivité : soit $(x, y) \in E_\Lambda$: il existe z tel que $\wp(z) = x$. L'équation différentielle assure alors que $\wp'^2 = 4x^3 - 60G_4x - 140G_6$, donc $\wp'(z) = \pm y$. Quitte à changer z par $-z$, on peut donc avoir $\wp'(z) = y$.

Exercice 3. Le théorème d'addition.

1. Soient f une fonction Λ -périodique avec un pôle d'ordre 3 en 0 et aucun autre pôle, a, b, c les trois zéros de f distincts modulo Λ . En intégrant zf'/f sur un contour bien choisi, démontrer que $a + b + c \in \Lambda$.

On choisit pour contour C le bord d'un parallélogramme fondamental du réseau, décalé de sorte à ce qu'il ne passe par aucun zéro ou pôle de f . On trouve

$$\frac{1}{2i\pi} \int_C z \frac{f'(z)}{f(z)} dz = a + b + c$$

. On décompose alors le contour selon ses quatre côtés : ce sont les segments $[a, a + \omega_1]$, $[a + \omega_1, a + \omega_1 + \omega_2]$, $[a + \omega_1 + \omega_2, a + \omega_2]$ et finalement $[a + \omega_2, a]$. En regroupant les côtés opposés, on trouve :

$$\int_C z \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_a^{a+\omega_1} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz - \int_{a+\omega_2}^{a+\omega_1+\omega_2} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \int_{a+\omega_1}^{a+\omega_1+\omega_2} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz - \int_a^{a+\omega_2} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

La première différence donne

$$\begin{aligned} \int_a^{a+\omega_1} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz - \int_{a+\omega_2}^{a+\omega_1+\omega_2} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \int_a^{a+\omega_1} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz - \int_a^{a+\omega_1} (z + \omega_2) \frac{f'(z)}{f(z)} dz \\ &= -\omega_2 \int_a^{a+\omega_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz. \end{aligned}$$

Un changement de variable $u = f(z)$ donne que $\int_a^{a+\omega_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ est l'intégrale de $\frac{du}{u}$ le long du lacet donné par $t \mapsto f(t)$ sur $[a, a+\omega_1]$, d'où cette intégrale est un multiple entier de $2i\pi$. En raisonnant similairement pour l'autre intégrale, on trouve

$$\frac{1}{2i\pi} \int_C z \frac{f'(z)}{f(z)} dz = n_2 \omega_1 - n_1 \omega_2 \in \Lambda.$$

2. Soient $z, w \in \mathbb{C}$ tels que ni z , ni w , ni $z+w$ n'appartiennent à Λ . En appliquant le fait précédent à $\wp' - A\wp - B$ pour A, B bien choisis, démontrer que

$$\det \begin{bmatrix} 1 & \wp(z) & \wp'(z) \\ 1 & \wp(w) & \wp'(w) \\ 1 & \wp(z+w) & -\wp'(z+w) \end{bmatrix} = 0.$$

Soient A, B complexes tels que $\wp'(z) - A\wp(z) - B = 0$ et $\wp'(w) - A\wp(w) - B = 0$. En appliquant le résultat de la question précédente à la fonction $\wp' - A\wp - B$, on trouve que $\wp' - A\wp - B$ a trois zéros a, b, c modulo Λ et que $a+b+c \in \Lambda$. Comme z, w sont déjà deux zéros distincts, le dernier zéro est nécessairement $-z-w$, et par conséquent $\wp'(-z-w) - A\wp(-z-w) - B = 0$.

Fonctions Gamma et digamma

Exercice 4. La fonction digamma.

On définit la fonction $\psi(s) = \text{dlog}\Gamma(s) = \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}$ méromorphe sur $\mathbb{C}$.

- Démontrer que ψ satisfait les équations fonctionnelles $\psi(s+1) = \psi(s) + \frac{1}{s}$ et $\psi(s) - \psi(1-s) = -\pi \cot(\pi s)$.
On part des équations $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ et $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$. On utilise ensuite l'additivité de la dérivée logarithmique et le fait que $\text{dlog}(s) = 1/s$, $\text{dlog} \sin(\pi s) = \pi \cot(\pi s)$.
- A l'aide de la formule du produit pour la fonction Γ , démontrer que

$$\psi(s) = -\gamma - \frac{1}{s} + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+s} \right).$$

On aurait envie d'écrire

$$\log \Gamma(s) = -\gamma s - \log(s) + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{s}{n} - \log \left(1 + \frac{s}{n} \right) \right)$$

au moins pour $\Re(s) > 0$ (même pour $s \notin \mathbb{R}_{\leq 0}$). Même si on n'est pas certain que cette fonction soit effectivement donnée par $s \mapsto \log(\Gamma(s))$, elle est un logarithme de Γ (son exponentielle fait clairement Γ). Les différents logarithmes de Γ possibles diffèrent de constantes qui disparaîtront quand on dérivera. Il suffit alors de prendre la dérivée terme à terme (ce qu'on peut faire car la somme converge localement uniformément, ainsi que la somme des dérivées). On obtient alors

$$\psi(s) = -\gamma - \frac{1}{s} + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+s} \right).$$

- Démontrer que le développement en série entière de ψ au voisinage de 1 est donné par

$$\psi(1+s) = -\gamma + \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \zeta(n+1) s^n.$$

Il s'agit simplement de calculer $\psi^{(n)}(1)$. Clairement, $\psi(1) = -\gamma$ car la série se télescope. En dérivant terme à terme, on peut établir, pour $k \geq 1$

$$\psi^{(k)}(s) = \frac{k!(-1)^{k+1}}{s^{k+1}} + \sum_{n \geq 1} \frac{k!(-1)^{k+1}}{(s+n)^{k+1}}.$$

En évaluant en 1, on trouve $\psi^{(k)}(1) = (-1)^{k+1} k! \zeta(k+1)$, ce qui conclut.

Exercice 5. La formule de duplication.

Démontrer que

$$2\log(2) + \psi(s) + \psi\left(s + \frac{1}{2}\right) = 2\psi(2s)$$

et en déduire que

$$\Gamma(2s) = \frac{2^{2s-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(s) \Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right).$$

On va utiliser la série pour ψ donnée dans l'exercice précédent. On a :

$$\psi(s) + \psi\left(s + \frac{1}{2}\right) = -2\gamma - \frac{1}{s} - \frac{2}{2s+1} + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{2}{n} - \frac{2}{2n+2s} - \frac{2}{2n+1+2s} \right)$$

On écrit astucieusement

$$\frac{2}{n} = \frac{2}{2n} + \frac{2}{2n+1} + \frac{2}{2n} - \frac{2}{2n+1}.$$

On trouve alors

$$\sum_{n \geq 1} \left(\frac{2}{n} - \frac{2}{2n+2s} - \frac{2}{2n+1+2s} \right) = \sum_{m \geq 2} \left(\frac{2}{m} - \frac{2}{m+2s} \right) + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{2}{2n} - \frac{2}{2n+1} \right).$$

En ajoutant le terme $\frac{2}{1} - \frac{2}{2s+1} - \frac{2}{1}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \psi(s) + \psi\left(s + \frac{1}{2}\right) &= -2\gamma - \frac{2}{2s} + \sum_{m \geq 1} \left(\frac{2}{m} - \frac{2}{m+2s} \right) + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{2}{2n} - \frac{2}{2n+1} \right) \\ &= \psi(2s) - 2\log(2). \end{aligned}$$

On déduit de ceci que $\frac{\Gamma(2s)}{2^{2s}\Gamma(s)\Gamma(s+\frac{1}{2})}$ est constante, car sa dérivée logarithmique est nulle. En évaluant en $s = \frac{1}{2}$, on trouve que la constante en question est $\frac{\Gamma(1)}{2\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(1)} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$.

Fonction zêta et séries de Dirichlet

On définit la fonction ζ par

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}.$$

Elle définit une fonction holomorphe sur le demi-plan $\Re(s) > 1$.

Exercice 6. Le produit eulérien.

On démontre l'égalité

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

où le produit porte sur les nombres premiers. Pour $x > 0$ réel, on note S_x l'ensemble des nombres entiers naturels dont tous les facteurs premiers sont $\leq x$.

1. Démontrer que pour $x > 0$ réel, $\Re(s) > 1$, on a

$$\left| \prod_{p \leq x} \left(\sum_{k \leq M} p^{-sk} \right) - \sum_{n \in S_x, n \leq 2^M} \frac{1}{n^s} \right| \leq \sum_{n > 2^M} \frac{1}{n^{\Re(s)}}.$$

Pour n nombre entier, p premier, on note $v_p(n)$ la plus grande puissance de p qui divise n . On développe explicitement

$$\prod_{p \leq x} \left(\sum_{k \leq M} p^{-sk} \right) = \sum_{(k_p)_{p \leq x}, k_p \leq M} \prod_p \frac{1}{p^{-sk_p}} = \sum_{n \in S_x, v_p(n) \leq M} \frac{1}{n^s}.$$

Un terme de la forme $\frac{1}{n^s}$ apparaît dans cette somme si et seulement si n est un produit de nombre premiers tous $\leq x$ et vérifie $v_p(n) \leq n$. En particulier, tous les éléments de S_x inférieurs à 2^M apparaissent dans cette somme. En effet, si $n \in S_x$ et n n'apparaît pas dans la somme, il existe un $p \leq x$ qui divise n à une puissance $> M$: en particulier, $n > p^M \geq 2^M$. Il s'ensuit que

$$\prod_{p \leq x} \left(\sum_{k \leq M} p^{-sk} \right) - \sum_{n \in S_x, n \leq 2^M} \frac{1}{n^s} = \sum_{n \in S_x, v_p(n) \leq M, n > 2^M} \frac{1}{n^s}$$

est une somme de $\frac{1}{n^s}$ avec seulement des $n > 2^M$. On borne très généreusement

$$\left| \sum_{n \in S_x, v_p(n) \leq M, n > 2^M} \frac{1}{n^s} \right| \leq \sum_{n \in S_x, v_p(n) \leq M, n > 2^M} \frac{1}{n^{\Re(s)}} \leq \sum_{n > 2^M} \frac{1}{n^{\Re(s)}}.$$

2. En déduire que

$$\prod_{p \leq x} \frac{1}{1 - p^{-s}} = \sum_{n \in S_x} \frac{1}{n^s}.$$

Le produit sur les p est fini, on peut faire tendre $M \rightarrow \infty$ pour obtenir l'égalité : d'une part

$$\prod_{p \leq x} \left(\sum_{k \leq M} p^{-sk} \right) \rightarrow \prod_{p \leq x} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

et d'autre part

$$\sum_{n \in S_x, n \leq 2^M} \frac{1}{n^s} \rightarrow \sum_{n \in S_x} \frac{1}{n^s}.$$

3. Démontrer à l'aide de cette formule que

$$\left| \prod_{p \leq x} \frac{1}{1 - p^{-s}} - \zeta(s) \right| \leq \sum_{n > x} \frac{1}{n^{\Re(s)}}$$

et en déduire la formule du produit eulérien pour ζ .

Même principe que plus tôt, mais cette fois-ci on observe que

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} - \sum_{n \in S_x} \frac{1}{n^s}$$

ne contient que des termes de la forme $1/n^s$ avec $n > x$ car tout nombre entier $\leq x$ est divisible par un nombre premier $\leq x$. On borne encore une fois généreusement

$$\left| \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} - \sum_{n \in S_x} \frac{1}{n^s} \right| \leq \sum_{n \notin S_x} \frac{1}{n^{\Re(s)}} \leq \sum_{n > x} \frac{1}{n^{\Re(s)}}.$$

Ce dernier terme étant le reste d'une série convergente, il tend vers 0 quand $x \rightarrow \infty$ et on obtient donc

$$\prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}.$$

4. Dans le même esprit, fixons $f : \mathbb{Z}_{\geq 1} \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction totalement multiplicative, c'est-à-dire que $f(mn) = f(m)f(n)$. On suppose également que

$$\sum_{n \geq 1} \frac{f(n)}{n^s}$$

converge absolument pour $\Re(s) > \sigma_0$. Démontrer que

$$\sum_{n \geq 1} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - f(p)p^{-s}}$$

pour $\Re(s) > \sigma_0$.

La preuve est *mutatis mutandis* exactement la même que ci-dessus.

Exercice 7. La dérivée logarithmique de ζ .

On définit la fonction Λ de Von Mangoldt par

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log(p) & n = p^k \text{ avec } p \text{ premier} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Démontrer que pour $\Re(s) > 1$, on a

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = - \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

On définit la fonction Λ de Von Mangoldt par

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log(p) & n = p^k \text{ avec } p \text{ premier} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Comme avec ψ (cf exercice ??), on a

$$\log \zeta(s) = - \sum_p \log(1 - p^{-s})$$

et on sait aussi qu'on a pas de multiple de $2i\pi$ ajouté car ζ envoie $\mathbb{R}_{>1}$ dans $\mathbb{R}_{>0}$. On peut alors dériver terme à terme, et on a

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = - \sum_p \frac{\log(p)p^{-s}}{1 - p^{-s}} = \sum_p \sum_{k \geq 1} \frac{\log(p)}{p^{ks}}.$$

On vérifie sans encombre que cette dernière série est précisément

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

Exercice 8. L'anneau des séries de Dirichlet.

Formellement, l'anneau des séries de Dirichlet est l'anneau des suites de nombres complexes muni de la convolution arithmétique :

$$(a * b)_n = \sum_{d|n} a_d b_{n/d}.$$

On dit qu'une série de Dirichlet est convergente s'il existe $\sigma \in \mathbb{R}$ tel que la série réelle $\sum_{n \geq 1} \frac{|a_n|}{n^\sigma}$ converge.

1. Démontrer que la convolution arithmétique est commutative, associative, a pour unité la série de Dirichlet formelle associée à $(1, 0, 0, \dots)$ et distributive sur l'addition.

On peut réécrire la convolution arithmétique comme $(a * b)_n = \sum_{de=n} a_d b_e$, ce qui rend la commutativité évidente. La distributivité sur l'addition est directe car

$$(a * (b + c))_n = \sum_{de=n} a_d (b_e + c_e) = \sum_{de=n} a_d b_e + \sum_{de=n} a_d c_e.$$

Un rapide calcul montre que la convolution avec $(1, 0, 0, \dots)$ est l'identité. Reste l'associativité :

$$((a * b) * c)_n = \sum_{de=n} \left(\sum_{uv=d} a_u b_v \right) c_e = \sum_{uve=n} a_u b_v c_e = \sum_{uw=n} a_u \left(\sum_{ve=w} b_v c_e \right) = (a * (b * c))_n.$$

2. Démontrer qu'une série de Dirichlet convergente définit une fonction holomorphe dans un demi-plan supérieur $\Re(s) > \sigma$.

Si $\sum_{n \geq 1} \frac{|a_n|}{n^\sigma}$ converge, alors la série $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s}$ converge normalement sur $\Re(s) \geq \sigma$ et définit donc une fonction holomorphe sur $\Re(s) > \sigma$.

3. Démontrer que deux séries de Dirichlet convergentes définissent la même fonction si, et seulement si elles sont égales.

On se ramène à démontrer que

$$\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s} = 0$$

pour $\Re(s) \gg 0$ seulement si $a_n = 0$ pour tout n . Quitte à changer s par $s + \sigma_0$ avec $\sigma_0 \gg 0$, on suppose $|a_n| \leq 1$ pour tout n . On procède par l'absurde : si m est le plus petit entier tel que $a_m \neq 0$, on écrit

$$0 = \frac{1}{m^s} \left(a_m + \sum_{n \geq m+1} \frac{a_n}{(n/m)^s} \right).$$

En multipliant par m^s des deux côtés, on obtient

$$-a_m = \sum_{n \geq m+1} \frac{a_n}{(n/m)^s}.$$

Les $m-1$ premiers termes de la série, à savoir $\frac{a_k}{(k/n)^s}$ avec $k = m+1, \dots, 2m-1$, tendent clairement vers 0. La série restante peut être majorée

$$\left| \sum_{n \geq 2m} \frac{a_n}{(n/m)^s} \right| \leq \sum_{n \geq 2m} \frac{|a_n|}{(n/m)^{\Re(s)}} \leq \sum_{k \geq 2} \frac{m}{k^{\Re(s)}}$$

car on a supposé $|a_n| \leq 1$ pour tout n . Cette série tend vers 0 quand $\Re(s) \rightarrow \infty$, ce qui donne une absurdité car on avait supposé $a_m \neq 0$.

4. Démontrer que si les séries de Dirichlet correspondant à $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont convergentes, alors leur convolution arithmétique est convergente et vérifie

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(a * b)_n}{n^s} = \left(\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s} \right) \cdot \left(\sum_{n \geq 1} \frac{b_n}{n^s} \right)$$

pour $\Re(s) \gg 0$.

On a la borne

$$\left| \sum_{d|n} a_d b_{n/d} \right| \leq \sum_{d|n} |a_d| \cdot |b_{n/d}|.$$

Si σ est tel que $\sum \frac{|a_n|}{n^\sigma}$ et $\sum \frac{|b_n|}{n^\sigma}$ convergent, alors

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} \frac{|(a * b)_n|}{n^\sigma} &\leq \sum_{n \geq 1} \sum_{de=n} \frac{|a_d b_e|}{(de)^\sigma} \\ &\leq \sum_{d \geq 1} \frac{|a_d|}{d^\sigma} \cdot \sum_{e \geq 1} \frac{|b_e|}{e^\sigma} \end{aligned}$$

et la série converge donc absolument. Ainsi, pour $\Re(s) \geq \sigma$, la convergence absolue permet d'intervertir l'ordre de sommation et d'écrire :

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s} \cdot \sum_{m \geq 1} \frac{b_m}{m^s} &= \sum_{m, n \geq 1} \frac{a_n b_m}{(mn)^s} \\ &= \sum_{k \geq 1} \frac{\sum_{mn=k} a_n b_m}{k^s}. \end{aligned}$$

5. Démontrer qu'une série de Dirichlet formelle est inversible si, et seulement si $a_1 \neq 0$.

Si $a_1 = 0$, alors $(a * b)_1 = a_1 b_1 = 0$. Si $a_1 \neq 0$, on définit explicitement l'inverse $(b_n)_n$ par récurrence. On commence par poser $b_1 = a_1^{-1}$. Supposons l'inverse défini jusqu'au terme $n-1$, on a $(a * b)_n = 0$ donc $a_1 b_n + \sum_{d|n, d>1} a_d b_{n/d} = 0$. Il suffit alors de poser $b_n = -a_1^{-1} \sum_{d|n, d>1} a_d b_{n/d}$ et on a par définition fabriqué un inverse.

6. Démontrer que l'inverse d'une série de Dirichlet convergente est convergent.

Indication : on pourra considérer un $\sigma \gg 0$ tel que $\sum_{n \geq 1} \frac{|a_n|}{n^\sigma} \leq 1$

On suppose pour simplifier les calculs que $a_1 = 1$, ce qui revient à multiplier tous les b_n par a_1 (et ne change donc pas la convergence). Pour $\sigma > 0$ assez grand, on a $\sum_{n \geq 1} \frac{|a_n|}{n^\sigma} \leq 1$ - en effet, quitte à remplacer σ par $\sigma_0 + \sigma$ on peut supposer $(a_n)_n$ bornée, et on se ramène au fait que $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\sigma} \rightarrow 0$ quand $\sigma \rightarrow \infty$. On va montrer avec la définition explicite de (b_n) qu'on a $|b_n| \leq n^\sigma$ pour tout n . En effet, on a

$$\begin{aligned} |b_n| &\leq \sum_{d|n, d>1} |a_d b_{n/d}| \\ &\leq n^\sigma \sum_{d|n, d>1} \frac{|a_d|}{d^\sigma} \\ &\leq n^\sigma \sum_{d>1} \frac{|a_d|}{d^\sigma} \\ &\leq n^\sigma. \end{aligned}$$

Ainsi, $n^{-\sigma-2} b_n$ est convergente.

Exercice 9. Produits eulériens formels

On munit l'anneau des séries de Dirichlet formelles de la distance suivante :

$$d((a_n)_n, (b_n)_n) = \frac{1}{\min\{n \geq 1 : a_n \neq b_n\}}.$$

1. Démontrer que d est bien une distance. On démontrera que $d(f, h) \leq \max(d(f, g), d(g, h))$.

La symétrie et la séparation sont immédiates (implicitement $d(f, f) = 0$).

Reste à démontrer l'inégalité ultramétrique. Notons $f = (a_n)_n, g = (b_n)_n, h = (c_n)_n$. L'inégalité $d(f, h) \leq \max(d(f, g), d(g, h))$ est équivalente à

$$\min\{n \geq 1 : a_n \neq c_n\} \geq \min(\min\{n \geq 1 : a_n \neq b_n\}, \min\{n \geq 1 : b_n \neq c_n\})$$

ou encore

$$\max\{n \geq 1 : a_n = c_n\} \geq \min(\max\{n \geq 1 : a_n = b_n\}, \max\{n \geq 1 : b_n = c_n\}).$$

Cette dernière inégalité est clairement vraie : si $a_1 = b_1, \dots, a_r = b_r$ et $b_1 = c_1, \dots, b_s = c_s$ alors $a_1 = c_1, \dots, a_{\min(r,s)} = c_{\min(r,s)}$.

2. Démontrer que dans l'anneau des séries de Dirichlet,

$$\left(1 - \frac{a}{m^s}\right) \cdot \left(\sum_{k \geq 0} \frac{a^k}{m^{ks}}\right) = 1$$

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{a}{m^s}\right) \cdot \left(\sum_{k \geq 0} \frac{a^k}{m^{ks}}\right) &= \sum_{k \geq 0} \frac{a^k}{m^{ks}} - \frac{a}{m^s} \sum_{k \geq 0} \frac{a^k}{m^{ks}} \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{a^k}{m^{ks}} - \sum_{k \geq 1} \frac{a^k}{m^{ks}} = 1. \end{aligned}$$

3. On fixe une suite $(a_p)_p$ de nombres complexes indexés sur les nombres premiers. Démontrer que

$$\prod_{p \leq x} \frac{1}{1 - a_p p^{-s}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s}$$

où $a_n = \prod a_p^{v_p(n)}$ si $n = \prod p^{v_p(n)}$ et la convergence est entendue au sens de la distance d .

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{a}{m^s}\right) \cdot \left(\sum_{k \geq 0} \frac{a^k}{m^{ks}}\right) &= \sum_{k \geq 0} \frac{a^k}{m^{ks}} - \frac{a}{m^s} \sum_{k \geq 0} \frac{a^k}{m^{ks}} \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{a^k}{m^{ks}} - \sum_{k \geq 1} \frac{a^k}{m^{ks}} = 1. \end{aligned}$$

4. En déduire qu'une série de Dirichlet

$$\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s}$$

admet un produit de la forme ci-dessus si, et seulement si $a_{mn} = a_m a_n$ pour tous m, n .

Une suite totalement multiplicative est entièrement déterminée par ses valeurs aux nombres premiers : si $n = \prod p^{v_p(n)}$, alors $a_n = \prod a_p^{v_p(n)}$. Il s'ensuit qu'une suite dont la série de Dirichlet associée admet une telle représentation comme produit infini est nécessairement totalement multiplicative. Réciproquement, une suite totalement multiplicative admet toujours une factorisation explicitée dans la question précédente.

5. Soit (b_{p^k}) une famille de nombres complexes indexée sur les puissances des nombres premiers, vérifiant $b_1 = 1$. On pose

$$f_p(s) = \sum_{k \geq 0} \frac{b_{p^k}}{p^{ks}}.$$

Démontrer qu'on a convergence du produit infini

$$\prod_p f_p(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{b_n}{n^s}$$

où $b_n = \prod b_{p^{v_p(n)}}$ si $n = \prod p^{v_p(n)}$.

De la même façon que la question 3, on a

$$\begin{aligned} \prod_{p \leq x} \sum_{k \geq 0} \frac{b_{p^k}}{p^{ks}} &= \sum_{(k_p)_{p \leq x}} \prod_{p \leq x} \frac{b_{p^{k_p}}}{p^{k_p s}} \\ &= \sum_{n \in S_x} \frac{b_n}{n^s} \end{aligned}$$

on a donc la même estimation

$$d \left(\prod_{p \leq x} \sum_{k \geq 0} \frac{b_{p^k}}{p^{ks}}, \sum_{n \geq 1} \frac{b_n}{n^s} \right) \leq \frac{1}{x}$$

et le produit infini converge.

6. Démontrer qu'une série de Dirichlet formelle $(b_n)_n$ admet une représentation comme produit infini de séries entières en les p^{-s} si et seulement si $b_{nm} = b_n b_m$ pour tous n, m premiers entre eux : on dit que b est faiblement multiplicative.

Si une série de Dirichlet admet une représentation comme produit infini de séries entières en les p^{-s} , alors le coefficient a_n s'écrit comme $\prod_p a_{p^{v_p(n)}}$ et la suite est faiblement multiplicative. Réciproquement, si on considère une suite faiblement multiplicative, elle est entièrement déterminée par ses valeurs sur les puissances des nombres premiers et le produit infini défini à la question précédente converge vers la suite.

7. En déduire que les suites faiblement multiplicatives (ou les séries de Dirichlet associées) forment un sous-groupe des inversibles de l'anneau des séries de Dirichlet formelles (en particulier, la convolution de deux suites faiblement multiplicatives est encore faiblement multiplicative !). Expliciter un isomorphisme entre ce sous-groupe et le groupe $\Lambda(\mathbb{C})^{\mathbb{N}}$, où $\Lambda(\mathbb{C})$ est le groupe multiplicatif des séries entières à coefficients complexes de terme constant 1.

On a

$$\prod_p f_p(s) \cdot \prod_p g_p(s) = \prod_p f_p(s)g_p(s)$$

et $f_p(s)g_p(s)$ est encore une série entière en p^{-s} . Si on écrit $f_p(s)$ comme $F_p(p^{-s})$ avec F_p une série entière, alors comme le coefficient constant de F_p est 1, F_p admet un inverse F_p^{-1} qui a aussi un coefficient constant de 1, et donc $\prod_p F_p(p^{-s})^{-1}$ est un inverse de $\prod_p f_p(s)$, qui est donc également faiblement multiplicatif. Notons $\text{Spm}(\mathbb{Z})$ l'ensemble des nombres premiers, qui est en bijection avec $\mathbb{N}$ par n'importe quelle énumération des nombres premiers. L'isomorphisme entre le sous-groupe des séries de Dirichlet faiblement multiplicatives (appelons-le D_{fm}) et $\Lambda(\mathbb{C})^{\text{Spm}(\mathbb{Z})}$ est donné par

$$\begin{aligned} \Lambda(\mathbb{C})^{\text{Spm}(\mathbb{Z})} &\rightarrow D_{\text{fm}} \\ (F_p)_p &\mapsto \prod_p F_p(p^{-s}). \end{aligned}$$

L'inverse de ce morphisme est explicite, il est donné par

$$\begin{aligned} D_{\text{fm}} &\rightarrow \Lambda(\mathbb{C})^{\text{Spm}(\mathbb{Z})} \\ \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s} &\mapsto \left(\sum_{k \geq 0} a_{p^k} T^k \right)_p. \end{aligned}$$

Remarque. On peut topologiser similairement l'anneau $\mathbb{C}[[z]]$ des séries entières, en posant $|f| = c^{-\text{ord}_0(f)}$ pour un $c > 1$, où $\text{ord}_0(f)$ est l'ordre d'annulation de f en zéro. On peut vérifier que $d_c(f, g) = |f - g|$ définit une distance également, et que la topologie induite ne dépend pas de c .

L'idée derrière ces distances est de considérer que les nombres complexes ont essentiellement tous la même taille, et qu'en comparaison z (ou $1/n^s$ dans le cas des séries de Dirichlet) est infinitésimalement petit, d'où $|a| = 1$ pour $a \in \mathbb{C}^*$ et $|z| = c^{-1}$.

La topologie se comporte très bien dans cet anneau : la multiplication et la somme sont continues, et, par exemple, la suite des sommes partielles d'une série converge vers la série elle-même. On peut aussi se servir de cette topologie pour prouver des résultats par densité, par exemple l'associativité de la composition de séries entières.